

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО
Директор Высшей школы
современной математики
А.Н. Соболевский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Алгебра III
по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 90 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 96 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 216, всего зач. ед.: 6

Программу составили:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

Аннотация

Алгебра является одной из основных математических дисциплин, понятия и конструкции которой встречаются во всех разделах современной математики. Третья часть курса алгебры посвящена более глубоким областям современной алгебры и образует основу еще более детального изучения алгебраических структур в последующих специальных курсах. Цель курса – продолжить знакомить студентов с базовыми понятиями и основными результатами современной алгебры. Основное внимание уделяется полилинейной алгебре, теории алгебр Ли, теории Галуа и теории представлений. Курс доводится до представлений алгебр Ли и колчанных алгебр.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Формирование фундаментальных знаний по алгебре (в частности, теории Галуа и теории представлений) для дальнейшего использования в других математических дисциплинах; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории групп и тензорных произведений векторных пространств;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении алгебраических методов в других математических дисциплинах.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-3 Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Знать основные понятия алгебры, в частности полилинейной алгебры, теории алгебр Ли, теории Галуа и теории представлений.

уметь:

Уметь разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с основными алгебраическими объектами.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Полилинейная алгебра.	2	4		8
2	Ассоциативные алгебры и их представления.	4	8		8
3	Классификация конечномерных полупростых алгебр Ли.	2	4		8
4	Алгебры с делением.	2	4		8
5	Центральные простые алгебры.	2	4		8
6	Теория Галуа. Сепарабельные и нормальные расширения. Группа Галуа.	4	8		8
7	Представления конечных групп.	2	4		8
8	Классификация неприводимых алгебр.	2	4		8
9	Представления симметрической группы.	2	4		8
10	Двойственность Шура-Вейля.	2	4		8

11	Алгебраические представления общей линейной группы над полем комплексных чисел.	4	8		8
12	Колчаны.	2	4		8
Итого часов		30	60		96
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		216 час., 6 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Полилинейная алгебра.

Тензорные произведения
Симметрическая и внешняя степени

2. Ассоциативные алгебры и их представления.

Ассоциативные алгебры и их представления
Теоремы Жордана-Гельдера и Крулля-Шмидта

3. Классификация конечномерных полупростых алгебр Ли.

Классификация конечномерных полупростых алгебр Ли и их представлений
Теорема Артина-Веддерберна

4. Алгебры с делением.

Случай поля вещественных чисел
Случай конечного поля

5. Центральные простые алгебры.

Центральные простые алгебры.
Группа Брауэра

6. Теория Галуа. Сепарабельные и нормальные расширения. Группа Галуа.

Сепарабельные и нормальные расширения.
Группа Галуа.
Основная теорема теории Галуа.
Неразрешимость полиномиальных уравнений в радикалах

7. Представления конечных групп.

Представления конечных групп.
Вполне приводимость.
Характеры

8. Классификация неприводимых алгебр.

Алгебры Хопфа.

Классификация неприводимых алгебр.
Теорема Бернсайда

9. Представления симметрической группы.

Представления симметрической группы

10. Двойственность Шура-Вейля.

Теорема о двойном централизаторе
Двойственность Шура-Вейля

11. Алгебраические представления общей линейной группы над полем комплексных чисел.

Алгебраические представления общей линейной группы над полем комплексных чисел
Представления алгебры Ли матриц порядка 2

12. Колчаны.

Представления колчанов
Теорема Габриэля

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Курс алгебры, [учебник для вузов] / Э. Б. Винберг, Москва, МЦНМО, 2019

Дополнительная литература

1. Алгебра [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / С. Ленг ; пер. с англ. Е. С. Голда ; под ред. А. И. Кострикина .— М. : Мир, 1968 .— 564 с.
2. Основы алгебры / Е. Е. Тыртышников. – Москва: Физматлит, 2020. – Электронная копия доступна на сайте электронно-библиотечной системы
3. Алгебра [Текст] / И. М. Гельфанд, А. Шень - М.МЦНМО,2009

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://old.mccme.ru/iur/courses.php>
<https://library.mccme.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	<u>2</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Разработчики:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-3 Способен использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Алгебра III» обучающийся должен:

знать:

Знать основные понятия алгебры, в частности полилинейной алгебры, теории алгебр Ли, теории Галуа и теории представлений.

уметь:

Уметь разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с основными алгебраическими объектами.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Полилинейная алгебра: тензорные произведения, симметрическая и внешняя степени
2. Ассоциативные алгебры и их представления
3. Теоремы Жордана-Гельдера и Крулля-Шмидта
4. Классификация конечномерных полупростых алгебр Ли и их представлений. Теорема Артина-Веддерберна
5. Алгебры с делением над полем вещественных чисел и конечными полями
6. Центральные простые алгебры. Группа Брауэра
7. Теория Галуа. Сепарабельные и нормальные расширения. Группа Галуа
8. Основная теорема теории Галуа. Неразрешимость полиномиальных уравнений в радикалах
9. Представления конечных групп. Вполне приводимость. Характеры
10. Алгебры Хопфа. Классификация неприводимых алгебр. Теорема Бернсайда
11. Представления симметрической группы
12. Теорема о двойном централизаторе, двойственность Шура-Вейля
13. Алгебраические представления общей линейной группы над полем комплексных чисел
14. Представления алгебры Ли матриц порядка 2
15. Представления колчанов, теорема Габриэля

Пример экзаменационного билета:

- 1) Группа Брауэра.
- 2) Представления алгебры Ли $SL(2)$

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, предусмотренных программой дисциплины.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена и зачета обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.